

Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen

Beispiele:

1. $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$ "Probieren"

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = \frac{27}{64} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

3. $2^{3x-2} = 2^7$ "Exponentenvergleich"
 $\Rightarrow 3x - 2 = 7 \Rightarrow x = 3$

4. $5^x = 30$

Auflösen nach x liefert:

$x = \log_5 30$ (Logarithmus von 30 zur Basis 5)

Besondere Logarithmen:

a) Zehnerlogarithmus (Basis 10)

$\log_{10} 3 = \lg 3 \approx 0,47712$

b) Natürlicher Logarithmus (Basis e)

$\log_e 3 = \ln 3 \approx 1,0986$

Berechnung von Logarithmen mit anderer Basis mit Hilfe von lg bzw. ln:

$$\log_c a = \frac{\lg a}{\lg c} = \frac{\ln a}{\ln c}$$

Beispiel: $\log_5 30 = \frac{\lg 30}{\lg 5} \approx 2,1133$

Rechenregeln für den Logarithmus

(1) $\log_a a = 1 \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

(2) $\log_a 1 = 0 \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

(3) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; u, v \in \mathbb{R}^+$

(4) $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; u, v \in \mathbb{R}^+$

(5) $\log_a u^v = v \cdot \log_a u \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; u \in \mathbb{R}^+; v \in \mathbb{R}$

Aufgaben:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,2$ ☐

$$x = \log_{0,5} 0,2 \approx 2,3219$$

2. $2^{x-1} = 35$ ☐

$$x-1 = \log_2 35 \Rightarrow x = \log_2 35 + 1 \approx 6,1293$$

3. $\frac{1}{4} \cdot 5^{y+2} = 250$ ☐

$$5^{y+2} = 1000 \Rightarrow y+2 = \log_5 1000 \Rightarrow y = \log_5 1000 - 2 \approx 2,2920$$

4. $4^{3z-2} = 4^{z+1}$ ☐

$$3z-2 = z+1 \Rightarrow 2z = 3 \Rightarrow z = \frac{3}{2}$$

5. $2^{3x-1} = 5^{x+1}$ ☒

$$\lg(2^{3x-1}) = \lg(5^{x+1}) \Rightarrow (3x-1) \cdot \lg 2 = (x+1) \cdot \lg 5$$

$$3x \cdot \lg 2 - \lg 2 = x \cdot \lg 5 + \lg 5 \Rightarrow 3x \cdot \lg 2 - x \cdot \lg 5 = \lg 5 + \lg 2$$

$$x(3\lg 2 - \lg 5) = \lg 5 + \lg 2 \Rightarrow x = \frac{\lg 5 + \lg 2}{3\lg 2 - \lg 5} \approx 4,8991$$

6. $\log_4 x = 0,5$ $D = \mathbb{R}^+$ ☐

$$x = 4^{0,5} = 2$$

7. $\log_7(4-x) = 80$ $D =]-\infty; 4[$ ☐

$$4-x = 7^{80} \Rightarrow x = 4 - 7^{80} \approx -4,05 \cdot 10^{67}$$

8. $\ln(x+3) = 7,56$ $D =]-3; \infty[$ ☐

$$x+3 = e^{7,56} \Rightarrow x = e^{7,56} - 3 \approx 1916,8455$$

9. $2\lg x = \lg(4x-3)$ ☒

Definitionsmenge:

$$x > 0 \wedge 4x-3 > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge x > \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow D = \left] \frac{3}{4}; \infty \right[$$

$$2\lg x = \lg(4x-3) \Rightarrow \lg x^2 = \lg(4x-3)$$

$$x^2 = 4x-3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 3$$